Empezamos a ver vectores aleatorios, pero nos concentramos en el caso bivariado. El caso k-variado es una generalización sencilla.

Vimos que para un vector aleatorio $\underline{X} = (\underline{X}_1, \underline{X}_2)$, la función de distribución discreta cumple

$$f(x_1, x_2) = P(\underline{X}_1 = x_1, \underline{X}_2 = x_2) \quad [\text{ probabilidades }]$$

$$f(x_1, x_2) \geqslant 0 \,, \quad \forall \ (x_1, x_2) \in V$$

$$\sum_{x_1} \sum_{x_2} f(x_1, x_2) = 1$$

mientras que para vectores aleatorios bivariados continuos usamos integrales en vez de sumar y en este caso

$f(x_1, x_2)$ puede tener a lo más un número finito de discontinuidades, además

$$P_{\underline{X}}(\underline{X} \in A) = \iint_A f(x_1, x_2) \, dx_1 dx_2$$

Ejemplo

Una tienda de computadoras vende computadoras armadas que constan del CPU y aquí hay 3 opciones

CPU
- Básico, \$3,000
- Intermedio, \$6,000
- Profesional, \$10,000

e igualmente vende 2 tipos de monitores

Monitor
- 20 pulgadas, 2,000
- 23 pulgadas, 5,000

Para las primeras 100 computadoras vendidas se observó que

$X_2 = \$$ Monitor

$X_1 = \$$ CPU

Variable	2,000	5,000
3,000	30	25
6,000	20	10
10,000	10	5

$\Rightarrow$

$f(x_1, x_2)$

	Variable	X_2: 2,000	5,000	$f(x_1)$
X_1	3,000	0.3	0.25	0.55
	6,000	0.2	0.10	0.3
	10,000	0.1	0.05	0.15
	$f(x_2)$	0.6	0.4	1

Claramente

$$\sum_{x_1} \sum_{x_2} f(x_1, x_2) = 1$$

Esta tabla representa la distribución de probabilidad conjunta de (X_1, X_2). Para obtener la distribución marginal de X_1 simplemente sumamos sobre todos los valores de X_2

$$f(x_1) = \sum_{x_2} f(x_1, x_2) \qquad f(x_2) = \sum_{x_1} f(x_1, x_2)$$

	Variable	$f(x_1)$
X_1	3,000	0.55
	6,000	0.3
	10,000	0.15

	Variable	$f(x_2)$
X_2	2,000	0.6
	5,000	0.4

Distribución condicional

$$f(x_1 \mid x_2) = \frac{f(x_1, x_2)}{f(x_2)} \; ; \quad \text{siempre que } f(x_2) > 0.$$

$$f(x_2|x_1) = \frac{f(x_1, x_2)}{f(x_1)} ; \quad \text{siempre que } f(x_1) > 0.$$

Esto obviamente se sigue de

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0$$

Si ya sabemos que B sucedió, ¿Cómo cambia la probabilidad de A?

$f(x_1|x_2)$

X_1	$f(x_1\mid x_2=2000)$	$f(x_1\mid x_2=5000)$
3,000	0.5	0.625
6,000	0.333	0.250
10,000	0.167	0.125
	1	1

$f(x_2\mid x_1)$	2,000	5,000	
$f(x_2\mid x_1=3{,}000)$	0.545	0.455	1
$f(x_2\mid x_1=6{,}000)$	0.667	0.333	1
$f(x_2\mid x_1=10{,}000)$	0.667	0.333	1

Para v.a. continuas tenemos que si $f(x_1, x_2)$ es la función de distribución conjunta

$$\Rightarrow \quad f(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)\, dx_2$$

$$f(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)\, dx_1$$

Adicionalmente

$$f(x_1 | x_2) = \frac{f(x_1, x_2)}{f(x_2)} \quad , \text{ con } f(x_2) > 0, \ \forall x_2 \in \mathbb{R}$$

$$f(x_2 | x_1) = \frac{f(x_1, x_2)}{f(x_1)} \quad , \text{ con } f(x_1) > 0$$

Ejemplo

Sea

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)\, \mathbb{1}_{(1,2)}(x_1)\, \mathbb{1}_{(0,1)}(x_2)$$

Claramente

$f(x_1, x_2) \geq 0 \quad \forall \; (x_1, x_2) \in (1,2) \times (0,1)$

$$\int_0^1 \int_1^2 (x_1 - x_2) \, dx_1 \, dx_2 =$$

$$\int_0^1 \int_1^2 x_1 \, dx_1 \, dx_2 - \int_0^1 \int_1^2 x_2 \, dx_1 \, dx_2$$

$$\int_1^2 x_1 \, dx_1 - \int_0^1 x_2 \, dx_2$$

$$= \frac{x_1^2}{2} \Big|_{x_1=1}^{2} - \frac{x_2^2}{2} \Big|_{x_2=0}^{1} = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= 2 - 1 = 1$$

$$f(x_1) = \int_0^1 (x_1 - x_2) \, \mathbb{1}_{(1,2)}(x_1) \, dx_2$$

$$= \mathbb{1}_{(1,2)}(x_1) \left(x_1 - \frac{x_2^2}{2} \Big|_{x_2=0}^{1} \right)$$

$$= (x_1 - 1/2) \, \mathbb{1}_{(1,2)}(x_1)$$

$$f(x_2) = \int_1^2 (x_1 - x_2)\, \mathbb{1}_{(0,1)}^{(x_1)}\, dx_2$$

$$= \mathbb{1}_{(0,1)}^{(x_1)} \left(\frac{x_1^2}{2} \Big|_{x_1=1}^{2} - x_2 \right)$$

$$4/2 - 1/2$$

$$= \left(3/2 - x_2\right) \mathbb{1}_{(0,1)}^{(x_2)}$$

$$\Rightarrow \quad f(x_1|x_2) = \frac{f(x_1, x_2)}{f(x_2)} = \frac{(x_1 - x_2)\, \mathbb{1}_{(1,2)}^{(x_1)}\, \cancel{\mathbb{1}_{(0,1)}^{(x_2)}}}{\left(3/2 - x_2\right) \cancel{\mathbb{1}_{(0,1)}^{(x_2)}}}$$

$$\Rightarrow \quad f(x_1|x_2) = \left(\frac{x_1 - x_2}{3/2 - x_2} \right) \mathbb{1}_{(1,2)}^{(x_1)}, \quad x_2 \notin 3/2$$

$$f(x_2|x_1) = \frac{(x_1 - x_2)}{(x_1 - 1/2)}\, \mathbb{1}_{(0,1)}^{(x_2)} .$$

$\boxed{\text{Generalizaciones}}$

Sea $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ una función de distribución conjunta

$$\Rightarrow \quad f(x_j) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n$$

dx_j no está ahí

Si por ejemplo

$$f(x_4, x_5 \mid x_2, x_3) = \frac{f(x_2, x_3, x_4, x_5)}{f(x_2, x_3)}$$